彩色問題の論理解法

山田 俊行

https://www.cs.info.mie-u.ac.jp/~toshi/

2025 年 7 月

彩色問題

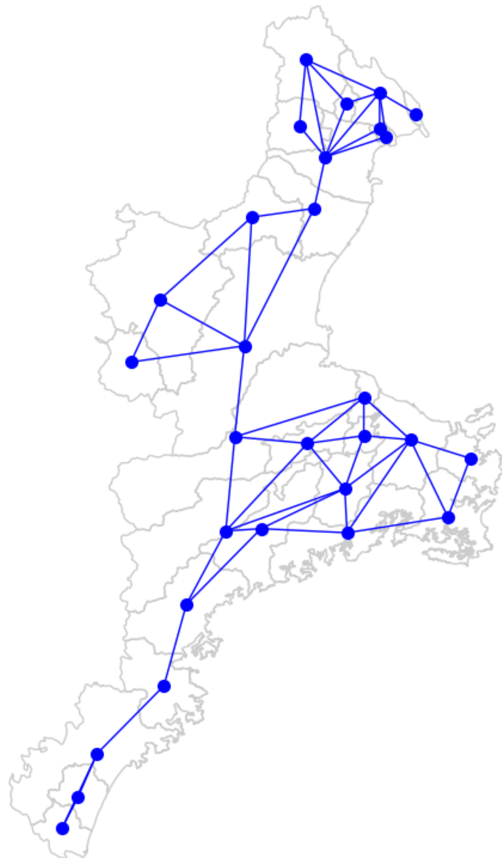
隣接領域を違う色にする塗り分けに，何色要るか?

「組み合わせ最適化問題」の代表例

隣接関係のグラフ

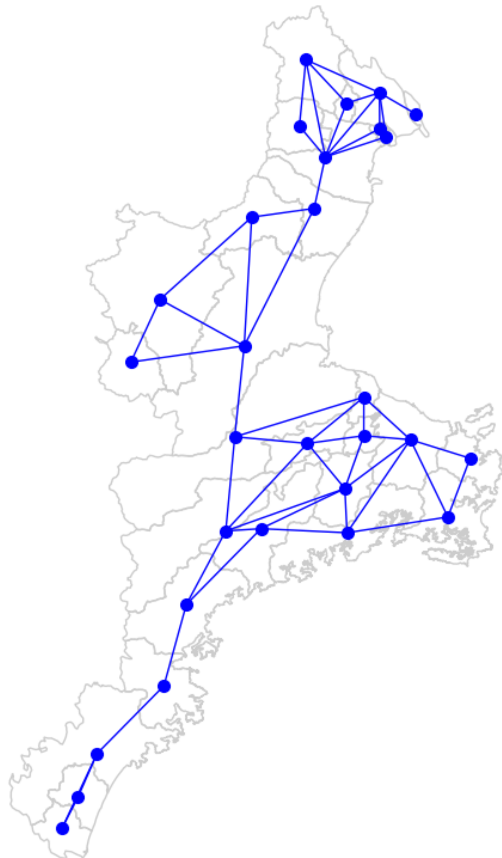
i と j が隣接 $\Leftrightarrow$ $\{i, j\} \in G$

$G = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \ldots\}$



グラフの彩色問題

グラフの頂点を，隣り合う頂点が別の色になるように塗り分けるには，何色要るか?



彩色問題の論理式

頂点数 m **の無向グラフ** G **が** n **色で彩色可能**

$\iff$

頂点への色の割り当てがあり，隣接頂点を違う色にできる

$$\exists f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}\ \forall v, v'\ (\{v, v'\} \in G \Rightarrow f(v) \neq f(v'))$$

$\iff$

$\exists\, R \subseteq \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ **頂点と色の対応が存在**

$\quad \forall v\ \exists c\ R(v, c)$ **各頂点 1 色以上**

$\quad \forall v, c\ (c \neq c' \ \Rightarrow\ \neg(R(v, c) \wedge R(v, c')))$ **各頂点 1 色以下**

$\quad \forall v, v', c\ (\{v, v'\} \in G\ \Rightarrow\ \neg\,(R(v, c) \wedge R(v', c)))$ **隣接で違う色**

具体的な彩色問題の論理式

グラフ G の 3 彩色問題 $(c \in \{1, 2, 3\})$

- **各頂点 1 色以上**

  $\forall v\ (R(v,1) \vee R(v,2) \vee R(v,3))$

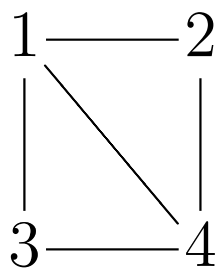
- **各頂点 1 色以下**

  $$\begin{aligned} \forall v\ (\ & \neg(R(v,1) \wedge R(v,2))\ \wedge \\ & \neg(R(v,1) \wedge R(v,3))\ \wedge \\ & \neg(R(v,2) \wedge R(v,3))\ ) \end{aligned}$$

- **隣接で違う色**

  $$\begin{aligned} \forall v, v'\ (\ & \{v, v'\} \in G\ \Rightarrow\ \neg(R(v,1) \wedge R(v',1))\ \wedge \\ & \{v, v'\} \in G\ \Rightarrow\ \neg(R(v,2) \wedge R(v',2))\ \wedge \\ & \{v, v'\} \in G\ \Rightarrow\ \neg(R(v,3) \wedge R(v',3))\ ) \end{aligned}$$

具体的な彩色問題の論理式

グラフ  **の 3 彩色問題** $(v \in \{1, 2, 3, 4\}, c \in \{1, 2, 3\})$

- **各頂点 1 色以上**

$$(R(1,1) \vee R(1,2) \vee R(1,3)) \ \wedge \ (R(2,1) \vee R(2,2) \vee R(2,3)) \ \wedge$$
$$(R(3,1) \vee R(3,2) \vee R(3,3)) \ \wedge \ (R(4,1) \vee R(4,2) \vee R(4,3))$$

- **各頂点 1 色以下**

$$(\ \neg(R(1,1) \wedge R(1,2)) \ \wedge \ \neg(R(1,1) \wedge R(1,3)) \ \wedge \ \neg(R(1,2) \wedge R(1,3))\ ) \ \wedge$$
$$(\ \neg(R(2,1) \wedge R(2,2)) \ \wedge \ \neg(R(2,1) \wedge R(2,3)) \ \wedge \ \neg(R(2,2) \wedge R(2,3))\ ) \ \wedge$$
$$(\ \neg(R(3,1) \wedge R(3,2)) \ \wedge \ \neg(R(3,1) \wedge R(3,3)) \ \wedge \ \neg(R(3,2) \wedge R(3,3))\ ) \ \wedge$$
$$(\ \neg(R(4,1) \wedge R(4,2)) \ \wedge \ \neg(R(4,1) \wedge R(4,3)) \ \wedge \ \neg(R(4,2) \wedge R(4,3))\ )$$

具体的な彩色問題の論理式 (続き)

グラフ

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & 2 \arrow[d, dash] \\ 3 \arrow[r, dash] & 4 \end{tikzcd}$$

の 3 彩色問題 $(v \in \{1, 2, 3, 4\}, c \in \{1, 2, 3\})$

- **隣接で違う色**

$$(\neg(R(1,1) \wedge R(2,1)) \wedge \neg(R(1,2) \wedge R(2,2)) \wedge \neg(R(1,3) \wedge R(2,3))) \wedge$$
$$(\neg(R(1,1) \wedge R(3,1)) \wedge \neg(R(1,2) \wedge R(3,2)) \wedge \neg(R(1,3) \wedge R(3,3))) \wedge$$
$$(\neg(R(1,1) \wedge R(4,1)) \wedge \neg(R(1,2) \wedge R(4,2)) \wedge \neg(R(1,3) \wedge R(4,3))) \wedge$$
$$(\neg(R(2,1) \wedge R(4,1)) \wedge \neg(R(2,2) \wedge R(4,2)) \wedge \neg(R(2,3) \wedge R(4,3))) \wedge$$
$$(\neg(R(3,1) \wedge R(4,1)) \wedge \neg(R(3,2) \wedge R(4,2)) \wedge \neg(R(3,3) \wedge R(4,3)))$$

具体的な彩色問題を表す論理式

「頂点 v の色は c」を意味する命題 $R(v, c)$ を $P_{v,c}$ で表す

- **各頂点 1 色以上**

$$(P_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{1,3}) \wedge (P_{2,1} \vee P_{2,2} \vee P_{2,3}) \wedge$$
$$(P_{3,1} \vee P_{3,2} \vee P_{3,3}) \wedge (P_{4,1} \vee P_{4,2} \vee P_{4,3})$$

- **各頂点 1 色以下**

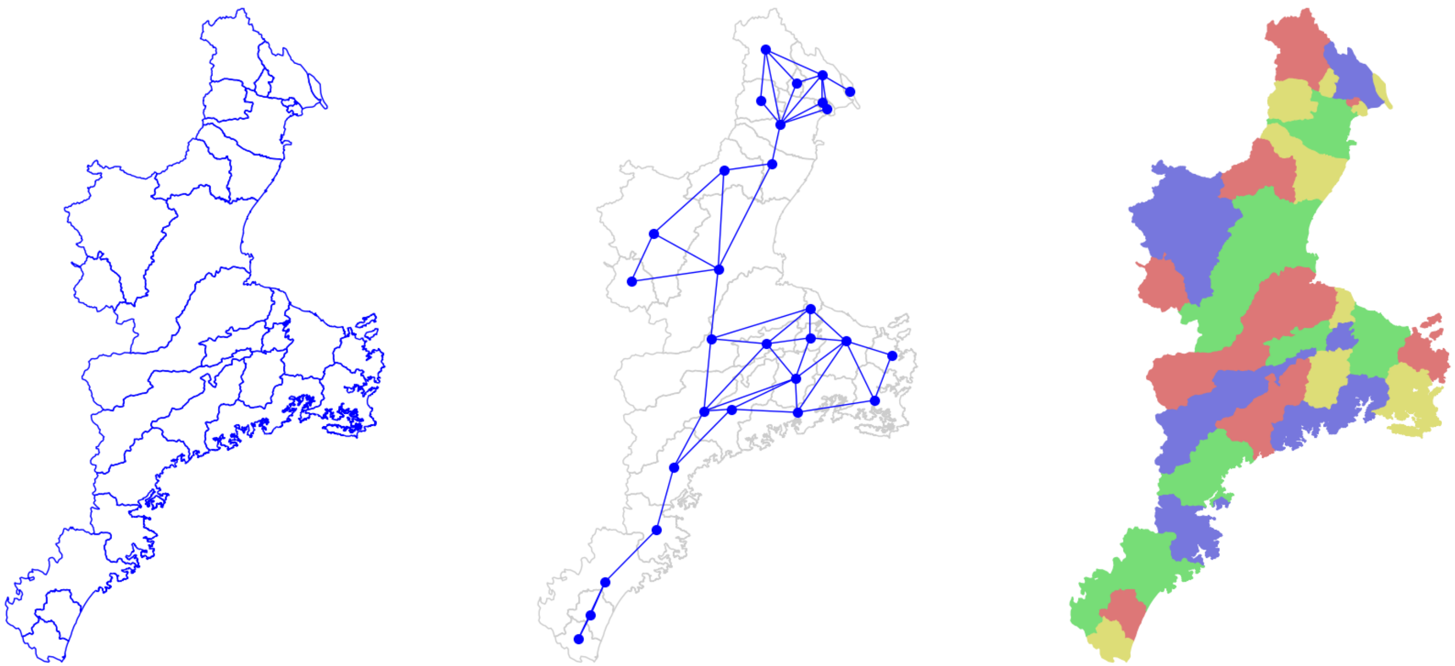
$$(\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,3}) \wedge (\neg P_{1,2} \vee \neg P_{1,3}) \wedge$$
$$(\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,3}) \wedge (\neg P_{2,2} \vee \neg P_{2,3}) \wedge$$
$$(\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,3}) \wedge (\neg P_{3,2} \vee \neg P_{3,3}) \wedge$$
$$(\neg P_{4,1} \vee \neg P_{4,2}) \wedge (\neg P_{4,1} \vee \neg P_{4,3}) \wedge (\neg P_{4,2} \vee \neg P_{4,3})$$

- **隣接で違う色**

$$(\neg P_{1,1} \vee \neg P_{2,1}) \wedge (\neg P_{1,2} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{1,3} \vee \neg P_{2,3}) \wedge$$
$$(\neg P_{1,1} \vee \neg P_{3,1}) \wedge (\neg P_{1,2} \vee \neg P_{3,2}) \wedge (\neg P_{1,3} \vee \neg P_{3,3}) \wedge$$
$$(\neg P_{1,1} \vee \neg P_{4,1}) \wedge (\neg P_{1,2} \vee \neg P_{4,2}) \wedge (\neg P_{1,3} \vee \neg P_{4,3}) \wedge$$
$$(\neg P_{2,1} \vee \neg P_{4,1}) \wedge (\neg P_{2,2} \vee \neg P_{4,2}) \wedge (\neg P_{2,3} \vee \neg P_{4,3}) \wedge$$
$$(\neg P_{3,1} \vee \neg P_{4,1}) \wedge (\neg P_{3,2} \vee \neg P_{4,2}) \wedge (\neg P_{3,3} \vee \neg P_{4,3})$$

彩色問題の論理解法

- 領域の隣接をグラフで表現
- 地図の彩色問題をグラフの彩色問題として定式化
- 具体的なグラフの彩色問題を論理式で記述
- 命題論理式の充足可能性判定問題に帰着



出典

地図は「国土数値情報 行政区域データ」を加工して作成

https://nlftp.mlit.go.jp/ksj/gml/