自然演繹による証明

●問題

論理式 $\exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)\,)$ を自然演繹で証明せよ．ただし，規則の適用回数がなるべく少ない証明図を作ること．

●解答 (証明 5 点，解説と考察 5 点)

[証明]

まず，自然演繹による $\exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)\,)$ の証明の概略を示す．

$$\dfrac{\overline{\overline{\exists z\,\neg P(z) \,\lor\, \neg\,\exists z\,\neg P(z)}}\ \mathrm{EM} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \exists z\,\neg P(z) \\ \vdots \\ \text{証明 A} \\ \vdots \\ \exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)\,) \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 \\ \neg\,\exists z\,\neg P(z) \\ \vdots \\ \text{証明 B} \\ \vdots \\ \exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)\,) \end{array}}{\exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)\,)}\ \lor\mathrm{E}\ 1,2$$

続いて，$\exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)\,)$ を仮定 1 $\exists z\,\neg P(z)$ から導く証明 A の部分と仮定 2 $\neg\,\exists z\,\neg P(z)$ から導く証明 B の部分を示す．なお，後の解説のために証明図に※印を付ける．

$$\dfrac{\overset{1}{\exists z\,\neg P(z)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{3}{\neg P(a)}}{\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(a)}\ \Rightarrow\mathrm{I}\ (\text{※}2)}{\exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)\,)}\ \exists\mathrm{I}}{\exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)\,)}\ \exists\mathrm{E}\ 3\ \ (\text{※}1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{5}{\neg\,P(b)}}{\exists z\,\neg P(z)}\ \exists\mathrm{I} \qquad \overset{2}{\neg\,\exists z\,\neg P(z)}}{\bot}\ \Rightarrow\mathrm{E}\ (\text{※}5)}{P(b)}\ \bot_{\mathrm{c}}\ \ 5}{\forall y\,P(y)}\ \forall\mathrm{I}\ (\text{※}4) \qquad \overset{4}{\neg\,\forall y\,P(y)}}{\bot}\ \Rightarrow\mathrm{E}\ (\text{※}3)}{\neg P(a)}\ \bot}{\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(a)}\ \Rightarrow\mathrm{I}\ 4}{\exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(x) \Rightarrow \neg P(y)\,)}\ \exists\mathrm{I}$$

[解説]

証明の直観的な意味を説明する．P の反例 (つまり $\neg P(z)$ を満たす z) が存在するか存在しないかの場合分けで証明している．P の反例 a があるなら，含意 $\neg\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)$ の $x = a$ のときの結論 $\neg P(x)$ が成り立つ．また，P の反例がないなら，$\forall y\,P(y)$ が成り立つということであり，含意 $\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)$ の前提 $\neg\,\forall y\,P(y)$ は成り立たない．P の反例があるかないかの場合分けのために，排中律 EM を使う．

自然演繹による上記の証明で注意の必要な点を解説する．※1 の $\exists$E 適用で変数条件が成り立つのは，変数 a が二つの前提 $\exists z\,\neg P(z)$ と $\exists x\,(\,\neg\,\forall y\,P(y) \Rightarrow \neg P(x)\,)$ に現れず，一時的な仮定 3 以外には前提の右式で有効な仮定がないためである．※2 の $\Rightarrow$I 適用では，仮定を使わない (0 個解消する)．※3 の $\Rightarrow$E 適用では，$\neg\,\forall y\,P(y)$ が $\forall y\,P(y) \Rightarrow \bot$ の略記であることを使う．※4 の $\forall$I 適用で変数条件が成り立つのは，変数 b が結論 $\forall y\,P(y)$ にも結論で有効な仮定 2 にも現れないためである．※5 の $\Rightarrow$E 適用では，$\neg\,\exists z\,\neg P(z)$ が $\exists z\,\neg P(z) \Rightarrow \bot$ の略記であることを使う．

なお，左下に示した証明 A では $\exists$E の適用を最下段でなく上に移動すると，前提の右式に変数 a が自由出現して変数条件が成り立たず，正しい証明とならない．

[考察]

規則の適用回数が変わる別解について考察する．排中律による場合分けのために，上記の証明では $\exists z\,\neg P(z) \lor \neg\,\exists z\,\neg P(z)$ という論理式を使ったが，代わりに，$\forall z\,P(x) \lor \neg\,\forall x\,P(x)$ なども使える．ただし，代わりの論理式を使うと，ド・モルガンの法則による式変形に相当する追加の部分証明が必要になり，規則の適用回数が増えてしまう．

自然演繹において，背理法 $\bot_{\mathrm{c}}$ を使う証明は常に排中律 EM を使う場合分けの証明に変換でき，逆に，排中律 EM を使う場合分けの証明は常に背理法 $\bot_{\mathrm{c}}$ を使う証明に変換できる．任意の論理式 A, B について，以下の変換ができる．

$$\cfrac{\begin{array}{c} \overset{i}{\neg A} \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{A}\,\bot_{\mathrm{c}} \qquad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{展開}} \\ \xleftarrow{\text{単純化}} \end{array} \qquad \cfrac{\cfrac{}{A \lor \neg A}\,\mathrm{EM} \quad \overset{j}{A} \quad \cfrac{\begin{array}{c} \overset{i}{\neg A} \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{A}\,\bot}{A}\,\lor\mathrm{E}\ j,i$$

$$\cfrac{\begin{array}{c} \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c} \overset{j}{A} \\ \vdots \\ B \end{array} \quad \overset{i}{\neg B}}{\bot}\,\Rightarrow\mathrm{E}}{\neg A}\,\Rightarrow\mathrm{I}\ j \\ \vdots \\ B \end{array} \quad \overset{i}{\neg B}}{\cfrac{\bot}{B}\,\bot_{\mathrm{c}}\ i}\,\Rightarrow\mathrm{E} \qquad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{単純化}} \\ \xleftarrow{\text{展開}} \end{array} \qquad \cfrac{\cfrac{}{A \lor \neg A}\,\mathrm{EM} \quad \begin{array}{c} \overset{j}{A} \\ \vdots \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} \overset{k}{\neg A} \\ \vdots \\ B \end{array}}{B}\,\lor\mathrm{E}\ j,k$$

第 1 の相互変換では，背理法 $\bot_{\mathrm{c}}$ を使う方が排中律 EM を使うよりも規則の適用回数が 2 回少なく，第 2 の相互変換では 2 回多い．

解答の証明では，背理法を 1 回，排中律を 1 回，その他の規則を 11 回使った．解答での排中律による場合分けの証明は，第 1 の相互変換の右側の形に合わないため，背理法を使う左側の形へと単純化して規則の適用回数を減らすことはできない．また，解答での排中律による場合分けの証明を，第 2 の相互変換により背理法を使う使う左側の形へと展開できるが，規則の適用回数が増えてしまうため，解答では背理法でなく排中律を採用した．

山田 俊行

https://www.cs.info.mie-u.ac.jp/~toshi/