

1. p. 126 演習問題 3.2 の解答 ($\exists E$ 規則の変数条件の訂正については正誤表を参照)

自然演繹による証明で変数条件が成り立つ理由を、以下に述べる。

- (1) $\exists x P \Rightarrow P$ の証明

$\exists E$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数が現れないため。

- 前提 $\exists x P$ と P
- ($\exists E$ による一時的な仮定 2 は対象外)

- (2) $\forall x P(x) \Rightarrow \forall y P(y)$ の証明

$\forall I$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 結論 $\forall y P(y)$
- 結論で有効な仮定 1, つまり $\forall x P(x)$

- (3) $P \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P \wedge Q(x))$ の証明

$\forall I$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 結論 $\forall x (P \wedge Q(x))$
- 結論で有効な仮定 1, つまり $P \wedge \forall x Q(x)$

- (4) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$ の証明

左の $\exists E$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 前提 $\exists x P(x)$ と $\exists x (P(x) \vee Q(x))$
- ($\exists E$ による一時的な仮定 4 は対象外)

右の $\exists E$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 b が現れないため。

- 前提 $\exists x Q(x)$ と $\exists x (P(x) \vee Q(x))$
- ($\exists E$ による一時的な仮定 5 は対象外)

- (5) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$ の証明

$\forall I$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 結論 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$
- 結論で有効な仮定 1, つまり $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

- (6) $\forall x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \forall x R(x, y)$ の証明

上の $\forall I$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 結論 $\forall x R(x, b)$
- 結論で有効な仮定 1, つまり $\forall x \forall y R(x, y)$

下の $\forall I$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 b が現れないため。

- 結論 $\forall y \forall x R(x, y)$
- 結論で有効な仮定 1, つまり $\forall x \forall y R(x, y)$

- (7) $\forall x \neg P(x) \Rightarrow \neg \exists x P(x)$ の証明

$\exists E$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 前提 $\exists x P(x)$ と \perp
- $\exists E$ による一時的な仮定 3 以外の, 前提の右式で有効な仮定 1, つまり $\forall x \neg P(x)$

- (8) $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x))$ の証明

$\exists E$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 前提 $\exists x P(x)$ と $\exists x Q(x)$
- $\exists E$ による一時的な仮定 3 以外の, 前提の右式で有効な仮定 1, つまり $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$

2. p. 128 演習問題 3.3 の解答 (∃E 規則の変数条件の訂正については正誤表を参照)

自然演繹による証明で変数条件が成り立つ理由を、以下に述べる。

(4) $\neg \exists x \neg P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$ の証明

$\forall I$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 結論 $\forall x P(x)$
- 結論で有効な仮定 1, つまり $\neg \exists x \neg P(x)$

(5) $(\forall x P(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow \exists x (P(x) \Rightarrow Q)$ の証明

$\exists E$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 前提 $\exists x \neg P(x)$ と $\exists x (P(x) \Rightarrow Q)$
- ($\exists E$ による一時的な仮定 4 や前提で無効な仮定 5 は対象外)

導出 \mathcal{D}_1 の部分については (4) と同じ。

(6) $(\forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)) \Rightarrow \exists x (P(x) \Rightarrow Q(x))$ の証明

上の $\exists E$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 a が現れないため。

- 前提 $\exists x Q(x)$ と $\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x))$
- ($\exists E$ による一時的な仮定 3 は対象外)

導出 \mathcal{D}_1 の部分については (4) と同じ。

導出 \mathcal{D}_2 の $\exists E$ の変数条件が成り立つのは、次の場所に自由変数 b が現れないため。

- 前提 $\exists x \neg P(x)$ と $\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x))$
- ($\exists E$ による一時的な仮定 5 や前提で無効な仮定 6 は対象外)