数理論理学 例題集

山田 俊行

https://www.cs.info.mie-u.ac.jp/~toshi/lectures/mathlogic/

2024 年 4 月

文章から論理式への翻訳 (数に関する主張)

数に関する数学的な主張を，論理式で表す．

二つ書かれた論理式のうち，上段が正式な (略さない) 表記，下段が略記である．

●数に関する定義

x の絶対値は y (x が非負なら y は x に等しく，負なら $-x$ に等しい)

$$(x \geq 0 \;\Rightarrow\; y = x) \;\land\; (x < 0 \;\Rightarrow\; y = -x)$$
$$(x \geq 0 \;\Rightarrow\; y = x),\; (x < 0 \;\Rightarrow\; y = -x)$$

x は y と z の最大値 (x は，y や z 以上で，y と z の少なくとも一方に等しい)

$$x \geq y \;\land\; x \geq z \;\land\; (x = y \;\lor\; x = z)$$
$$x \geq y,\; x \geq z,\; (x = y \;\lor\; x = z)$$

x は偶数 (x は 2 の倍数)

$$\exists k \;\; (k \in \mathbb{Z} \;\land\; x = 2k)$$
$$\exists k \in \mathbb{Z} \;\; x = 2k$$

x は y と z の公約数 (x は y の約数であり z の約数でもある)

$$\exists i \;\; (i \in \mathbb{Z} \;\land\; ix = y) \;\land\; \exists j \;\; (j \in \mathbb{Z} \;\land\; jx = z)$$
$$\exists i \in \mathbb{Z} \;\; ix = y,\; \exists j \in \mathbb{Z} \;\; jx = z$$

n は 素数 (n は 2 以上で約数は 1 と n だけ)

$$n \geq 2 \;\land\; \forall k\, \forall m \;\; (m \in \mathbb{N} \;\land\; k \in \mathbb{N} \;\land\; n = km \;\Rightarrow\; k = 1 \;\lor\; k = n)$$
$$n \geq 2 \;\land\; \forall k, m \in \mathbb{N} \;\; (n = km \;\Rightarrow\; k = 1 \;\lor\; k = n)$$

実数の集合は稠密 (異なる 2 つの実数の間には別の実数がある)

$$\forall x\, \forall y \;\; \big(x \in \mathbb{R} \;\land\; y \in \mathbb{R} \;\land\; x < y \;\Rightarrow\; \exists z \;\; (z \in \mathbb{R} \;\land\; x < z \;\land\; z < y)\big)$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; (x < y \;\Rightarrow\; \exists z \in \mathbb{R} \;\; x < z < y)$$

●数に関する性質

y は 0 以上 1 未満の実数

$$y \in \mathbb{R} \;\land\; 0 \leq y \;\land\; y < 1$$
$$y \in \mathbb{R},\; 0 \leq y < 1$$

x と y の積が 0 なら，少なくとも一方は 0

$$xy = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\lor\; y = 0$$

$x = -1$ や $x = 1$ のとき，$(x+1)\,x\,(x-1) = 0$ が成り立つ

$$x = -1 \;\lor\; x = 1 \;\Rightarrow\; (x+1)\,x\,(x-1) = 0$$

$x = 3,\; y = 2$ は，連立方程式 $x + y = 5,\; 2x = 3y$ の解であり，他には解はない．

$$x = 3 \;\land\; y = 2 \;\Leftrightarrow\; x + y = 5 \;\land\; 2x = 3y$$
$$x = 3,\; y = 2 \;\Leftrightarrow\; x + y = 5,\; 2x = 3y$$

整数の加法は交換法則を満たす

$$\forall x\, \forall y \ \ (x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y \in \mathbb{Z} \ \ \Rightarrow \ \ x+y=y+x)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ \ x+y=y+x$$

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ は，実数 x, y に関する恒等式である

$$\forall x\, \forall y \ \ (x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R} \ \ \Rightarrow \ \ (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

すべての自然数 m, n について，$m^2=n^2$ ならば $m=n$

$$\forall m\, \forall n \ \ (m \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ m^2=n^2 \ \ \Rightarrow \ \ m=n)$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \ \ (m^2=n^2 \ \ \Rightarrow \ \ m=n)$$

方程式 $x^2+4x+1=0$ には実数解がある

$$\exists x \ \ (x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x^2+4x+1=0)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \ x^2+4x+1=0$$

負の偶数がある

$$\exists x\, \exists k \ \ (x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x<0 \ \wedge \ k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x=2k)$$

$$\exists x, k \in \mathbb{Z} \ \ (x<0, \ x=2k)$$

k は 自然数 m, n を使って $2m+3n$ の形に書ける

$$\exists m\, \exists n \ \ (m \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ k=2m+3n)$$

$$\exists m, n \in \mathbb{N} \ \ k=2m+3n$$

任意の整数 x, y に対して，y を足すと x になる整数がただ 1 つある

$$\begin{aligned}&\forall x\, \forall y \big(x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y \in \mathbb{Z} \ \ \Rightarrow \\ &\qquad \exists z\, (z \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x=y+z) \ \wedge \\ &\qquad \forall z_1\, \forall z_2\, (z_1 \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x=y+z_1 \ \wedge \ z_2 \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x=y+z_2 \ \ \Rightarrow \ \ z_1=z_2)\big)\end{aligned}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ \ \exists!\, z \in \mathbb{Z} \ \ x=y+z \qquad (\exists! \ \text{は一意存在の略記法})$$

実数関数 $\exp(x)$ は単調増加関数である．

$$\forall x\, \forall y \ \ \big(x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R} \ \wedge \ x<y \ \ \Rightarrow \ \ \exp(x)<\exp(y)\big)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ \big(x<y \ \ \Rightarrow \ \ \exp(x)<\exp(y)\big)$$

文章から論理式への翻訳 (集合論での定義)

集合論 (集合・関係・写像・順序) の主な定義を論理式で表す.

二つ書かれた論理式の上段が正式な (略さない) 表記，下段が略記である.

●集合に関する定義

(集合に関する基本的な定義については，教科書の 1.6 節を参照.)

集合 A は集合 B の真部分集合である

$$\forall x\,(x \in A \;\Rightarrow\; x \in B) \;\wedge\; \neg \forall x\,(x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B)$$
$$\forall x \in A\;\, x \in B \;\wedge\; \exists x \in B\;\, x \notin A$$
$$A \subseteq B \;\wedge\; A \neq B$$

集合 A と集合 B は互いに素である

$$\forall x\,(x \notin A \;\vee\; x \notin B)$$
$$\neg\; \exists x \in A\;\, x \in B$$
$$A \cap B = \emptyset$$

集合 $C_1, \ldots, C_n$ は集合 C の直和分割である

$$\forall x\;\big(\,x \in C \;\Leftrightarrow\; \exists i\;\;(i \in \{1, \ldots, n\} \;\wedge\; x \in C_i)\,\big) \;\wedge$$
$$\forall i\, \forall j\;\;\big(i \in \{1, \ldots, n\} \;\wedge\; j \in \{1, \ldots, n\} \;\wedge\; \neg\, i = j \;\Rightarrow\; \neg\, \exists x\;\;(x \in C_i \;\wedge\; x \in C_j)\big)$$
$$C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i\,,\quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\;\;(i \neq j \;\Rightarrow\; C_i \cap C_j = \emptyset)$$

● 2 項関係に関する定義

集合 A 上の 2 項関係 R は反射的である

$$\forall x\,(x \in A \;\Rightarrow\; xRx)$$
$$\forall x \in A\;\; xRx$$

集合 A 上の 2 項関係 R は対称的である.

$$\forall x\, \forall y\;\,(x \in A \;\wedge\; y \in A \;\wedge\; xRy \;\Rightarrow\; yRx)$$
$$\forall x, y \in A\;\,(xRy \;\Rightarrow\; yRx)$$

集合 A 上の 2 項関係 R は推移的である

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\,(x \in A \;\wedge\; y \in A \;\wedge\; z \in A \;\wedge\; xRy \;\wedge\; yRz \;\Rightarrow\; xRz)$$
$$\forall x, y, z \in A\,(xRy,\; yRz \;\Rightarrow\; xRz)$$

集合 A 上の 2 項関係 R は反対称的である

$$\forall x\, \forall y\,(x \in A \;\wedge\; y \in A \;\wedge\; xRy \;\wedge\; yRx \;\Rightarrow\; x = y)$$
$$\forall x, y \in A\,(xRy,\; yRx \;\Rightarrow\; x = y)$$

●写像に関する定義

集合 A から集合 B への関係 f は写像である

$$\forall x\,(x \in A \ \Rightarrow\ \exists y\,(y \in B \ \wedge\ xfy))\ \wedge\ \forall x\,\forall y\,\forall y'\,(xfy \ \wedge\ xfy' \ \Rightarrow\ y = y')$$

$$\forall x \in A\,\exists y \in B\ xfy,\ \ \forall x, y, y'\,(xfy,\ xfy' \ \Rightarrow\ y = y')$$

$$\forall x \in A\,\exists!\,y \in B\ xfy$$

集合 A から集合 B への写像 f は全射である

$$\forall y\ \big(y \in B \ \Rightarrow\ \exists x\ (x \in A \ \wedge\ f(x) = y)\big)$$

$$\forall y \in B\,\exists x \in A\ \ f(x) = y$$

集合 A から集合 B への写像 f は単射である

$$\forall x\,\forall x'\,(x \in A \ \wedge\ x' \in A \ \wedge\ \neg\, x = x' \ \Rightarrow\ \neg\, f(x) = f(x'))$$

$$\forall x, x' \in A\,(x \neq x' \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(x'))$$

集合 A 上の 2 項演算 $*$ は可換である

$$\forall x\,\forall y\,(x \in A \ \wedge\ y \in A \ \Rightarrow\ x * y = y * x)$$

$$\forall x, y \in A\ \ x * y = y * x$$

集合 A 上の 2 項演算 $*$ は結合的である

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\ \big(x \in A \ \wedge\ y \in A \ \wedge\ z \in A \ \Rightarrow\ (x * y) * z = x * (y * z)\big)$$

$$\forall x, y, z \in A\ \ (x * y) * z = x * (y * z)$$

●半順序に関する定義

半順序集合 $(A, \preceq)$ の要素 a と b は比較不能である

$$\neg\, a \preceq b \ \wedge\ \neg\, b \preceq a$$

$$a \not\preceq b,\ \ b \not\preceq a$$

半順序集合 $(A, \preceq)$ の順序関係 $\preceq$ は線形な関係である

$$\forall x\,\forall y\ (x \in A \ \wedge\ y \in A \ \Rightarrow\ x \preceq y \ \vee\ y \preceq x)$$

$$\forall x, y \in A\ (x \preceq y \ \vee\ y \preceq x)$$

半順序集合 $(A, \preceq)$ の要素 a は A の部分集合 X の最大元である

$$a \in X \ \wedge\ \forall x\,(x \in X \ \Rightarrow\ x \preceq a)$$

$$a \in X,\ \forall x \in X\ \ x \preceq a$$

半順序集合 $(A, \preceq)$ の要素 a は A の部分集合 X の極大元である

$$a \in X \ \wedge\ \forall x\,(x \in X \ \wedge\ a \preceq x \ \Rightarrow\ x = a)$$

$$a \in X,\ \forall x \in X\,(a \preceq x \ \Rightarrow\ x = a)$$

半順序集合 $(A, \preceq)$ の部分集合 X は上に有界である

$$\exists a\,(a \in A \ \wedge\ \forall x\,(x \in X \ \Rightarrow\ x \preceq a))$$

$$\exists a \in A\ \ \forall x \in X\ \ x \preceq a$$

証明法

証明法をふまえて，集合論（集合・関係・写像・順序）に関する性質を証明する．

●集合に関する性質の証明

問 1 (集合の共通部分と補集合との関係)

任意の集合 A, B について，$A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B^{\mathrm{c}}$ という性質が成り立つことを証明せよ．

答 1

($\Rightarrow$) $A \cap B = \emptyset$ を仮定する．部分集合の定義を使って $A \subseteq B^{\mathrm{c}}$ を証明するために，$x \in A$ を仮定して $x \in B^{\mathrm{c}}$ を示す．$x \in B^{\mathrm{c}}$ を示すには，補集合の定義から，$x \in B$ を仮定して矛盾が生じることを示せばよい．2 つの仮定 $x \in A$ と $x \in B$ と共通部分の定義から，$x \in A \cap B$．これと仮定 $A \cap B = \emptyset$ より $x \in \emptyset$ であるが，これは空集合の定義に矛盾する．

($\Leftarrow$) $A \subseteq B^{\mathrm{c}}$ を仮定する．$A \cap B = \emptyset$ を証明するため，空集合の定義を使って，$x \in A \cap B$ を満たす x があると仮定して矛盾が生じることを示す．仮定 $x \in A \cap B$ と共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B$ である．$x \in A$ と仮定 $A \subseteq B^{\mathrm{c}}$ と部分集合の定義から，$x \in B^{\mathrm{c}}$．補集合の定義より，これは $x \in B$ に矛盾する．

問 2 (集合の包含関係と差の性質)

任意の集合 A, X, Y について，$X \subseteq Y$ ならば $A \setminus Y \subseteq A \setminus X$，という性質が成り立つことを証明せよ．

答 2

$X \subseteq Y$ を仮定する．さらに，部分集合の定義を使って，$x \in A \setminus Y$ と $x \notin A \setminus X$ を満たす要素 x があると仮定して矛盾を導く．$x \notin A \setminus X$ だから，差の定義から，(1) $x \notin A$ または (2) $x \in X$，である．(1) と (2) のどちらの場合にも矛盾が生じることを示す．(1) は $x \in A$ に矛盾する．(2) と仮定 $X \subseteq Y$ と部分集合の定義より導かれる $x \in Y$ は，$x \notin Y$ に矛盾する．

問 3 (全順序集合の有界性)

全順序集合 $(A, \preceq)$ の真部分集合 X は，下に閉じているならば上に有界である，ということを証明せよ．ここで，順序集合 $(A, \preceq)$ の部分集合 X について，X が下に閉じているとは，$x \in X,\ a \in A,\ a \preceq x$ なら常に $a \in X$ であることをいい，また，X が上に有界であるとは，ある A の要素 a について，$x \in X$ なら常に $x \preceq a$ を満たすことである．

答 3

X が A の真部分集合のとき，$a \in A \setminus X$ を満たす a が存在する．そこで，$x \not\preceq a$ となる X の要素 x がある (つまり a は X の上界に属さない) と仮定して矛盾を導く．仮定 $x \not\preceq a$ と $\preceq$ が全順序であることより，$a \preceq x$ である．さらに，$x \in X$ と $a \preceq x$ と，X が下に閉じていることより，$a \in X$．これは $a \in A \setminus X$ に矛盾する．

●写像に関する性質の証明

問 4 (自然数上の演算の全射性)

自然数上の演算 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を，n が偶数のとき $f(n) = n+1$，n が奇数のとき $f(n) = 2 \times (n \,\mathrm{div}\, 4)$，と定める．ここで，div は自然数上の除算を表す．演算 f が全射であること，つまり，各自然数 m について，$f(n) = m$ を満たす自然数 n があることを証明せよ．

答 4

任意の自然数 m について，m が偶数でも奇数でも，$f(n) = m$ となる自然数 n が存在することを示す．(1) m が偶数のときは，$n = 2m + 1$ とおく．偶数の定義より，$m = 2m'$ を満たす自然数 m' があり，n は m' を使って $n = 2m + 1 = 4m' + 1$ と表せる．n は奇数だから，f の定義より $f(n) = 2 \times ((4m' + 1) \,\mathrm{div}\, 4) = 2m' = m$．(2) m が奇数のときは，$n = m - 1$ とおく．$m \geq 1$ なので，n は自然数である．奇数の定義より，$m = 2m' + 1$ を満たす自然数 m' があり，n は m' を使って $n = m - 1 = (2m' + 1) - 1 = 2m'$ と表せる．n は偶数だから，f の定義より $f(n) = 2m' + 1 = m$．

問 5 (集合演算の単調性)

自然数全体のベキ集合上の演算 $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を，$\mathbb{N} \setminus X = \emptyset$ のとき $F(X) = X$，$\mathbb{N} \setminus X \neq \emptyset$ のとき $F(X) = X \cup \{\min(\mathbb{N} \setminus X)\}$，と定める．ここで，$\min X$ は，自然数集合 X の最小値を表す．演算 F が集合の包含関係について単調であること，つまり，任意の自然数集合 X, Y について，$X \subseteq Y$ ならば $F(X) \subseteq F(Y)$，という性質が成り立つことを証明せよ．

答 5

任意の自然数集合 X, Y について，$X \subseteq Y$ を仮定し，$F(X) \subseteq F(Y)$ を証明する．この包含関係を証明するため，任意の自然数 n について，$n \in F(X)$ を仮定し，$n \in F(Y)$ を示す．仮定 $n \in F(X)$ と $F(X)$ の定義より，(1) $n \in X$ であるか，または，(2) $X \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$ かつ $n = \min(\mathbb{N} \setminus X)$ であるから，この場合分けで，$n \in F(Y)$ を示す．(1) $n \in X$ のとき，仮定 $X \subseteq Y$ より $n \in Y$ だから，$F(Y)$ の定義より $n \in F(Y)$．(2) $\mathbb{N} \setminus X \neq \emptyset$ かつ $n = \min(\mathbb{N} \setminus X)$ のとき，$n \in Y$ か否かに分けて $n \in F(Y)$ を示す．(2–1) $n \in Y$ のとき，$F(Y)$ の定義より $n \in F(Y)$ である．(2–2) $n \in \mathbb{N} \setminus Y$ のとき，$\mathbb{N} \setminus Y \neq \emptyset$ だから，$F(Y)$ の定義より，$n = \min(\mathbb{N} \setminus Y)$ が証明できれば $n \in F(Y)$ を導ける．$n \in \mathbb{N} \setminus Y$ のときに n が $\mathbb{N} \setminus Y$ の最小値であることを証明するため，$\mathbb{N} \setminus Y$ に属する任意の自然数 m について $n \leq m$ を示す．$m \in \mathbb{N} \setminus Y$ のとき，仮定 $X \subseteq Y$ と問 2 の結果より $m \in \mathbb{N} \setminus X$ が成り立つ．今考えている (2) の場合，n は $\mathbb{N} \setminus X$ の最小値だから，$m \in \mathbb{N} \setminus X$ より $n \leq m$．

自然演繹の証明 (直観主義論理)

各種の論理法則を導く自然演繹の証明図の例を以下に示す.

●命題論理の証明

問 1 以下の各論理式を導く，自然演繹による証明図を示せ.

(1) $P \ \Rightarrow\ (Q \Rightarrow Q)$

(2) $P \wedge (P \Rightarrow Q)\ \Rightarrow\ Q$

(3) $P \wedge Q\ \Rightarrow\ \neg\,(P \Rightarrow \neg Q)$

(4) $P \vee Q\ \Rightarrow\ (\neg P \Rightarrow Q)$

答 1

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{Q}}{Q \Rightarrow Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1}{P \ \Rightarrow\ (Q \Rightarrow Q)}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}$$

(注意 ※ 1)
(注意 ※ 2)

(※ 1) 仮定をそのまま (0 回の規則適用で) 規則の前提として使える
(※ 2) 仮定を使わなくてもよい (0 個の仮定解消)

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{P \wedge (P \Rightarrow Q)}}{P}\ \wedge\mathrm{E}_1 \qquad \dfrac{\overset{1}{P \wedge (P \Rightarrow Q)}}{P \Rightarrow Q}\ \wedge\mathrm{E}_2}{Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{P \wedge (P \Rightarrow Q)\ \Rightarrow\ Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1$$

(注意 ※ 3)

(※ 3) 同じ仮定を複数使ったり同時に解消したりできる

(3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{P \wedge Q}}{Q}\ \wedge\mathrm{E}_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{P \wedge Q}}{P}\ \wedge\mathrm{E}_1 \qquad \overset{2}{P \Rightarrow \neg Q}}{\neg Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{\bot}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{\neg\,(P \Rightarrow \neg Q)}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 2}{P \wedge Q\ \Rightarrow\ \neg\,(P \Rightarrow \neg Q)}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1$$

(注意 ※ 4)
(注意 ※ 5)

(※ 4) $\neg Q$ は $Q \Rightarrow \bot$ の略記
(※ 5) $\neg\,(P \Rightarrow \neg Q)$ は $(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \bot$ の略記

(4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{P \vee Q} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{3}{P} \quad \overset{2}{\neg P}}{\bot}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{Q}\ \bot \qquad \overset{4}{Q}}{Q}\ \vee\mathrm{E}\ 3, 4}{\neg P \Rightarrow Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 2}{P \vee Q\ \Rightarrow\ (\neg P \Rightarrow Q)}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1$$

●述語論理の証明

問 2　以下の各論理式を導く，自然演繹による証明図を示せ．

(1) $\forall x\,\bigl(P(x)\land Q(x)\bigr)\ \Rightarrow\ \forall x\,P(x)\land\forall x\,Q(x)$

(2) $P\land\exists x\,Q(x)\ \Rightarrow\ \exists x\,\bigl(P\land Q(x)\bigr)$

(3) $\exists x\,\forall y\,R\bigl(x,y\bigr)\ \Rightarrow\ \forall y\,\exists x\,R\bigl(x,y\bigr)$

(4) $\exists x\,\forall y\,R\bigl(f(x),y\bigr)\ \Rightarrow\ \forall y\,\exists x\,R\bigl(x,g(x,y)\bigr)$

答 2

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall x\,\bigl(P(x)\land Q(x)\bigr)}}{P(a)\land Q(a)}\;\forall\mathrm{E}}{P(a)}\;\land\mathrm{E}_1}{\forall x\,P(x)}\;\forall\mathrm{I}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall x\,\bigl(P(x)\land Q(x)\bigr)}}{P(b)\land Q(b)}\;\forall\mathrm{E}}{Q(b)}\;\land\mathrm{E}_2}{\forall x\,Q(x)}\;\forall\mathrm{I}}{\forall x\,P(x)\land\forall x\,Q(x)}\;\land\mathrm{I}}{\forall x\,\bigl(P(x)\land Q(x)\bigr)\ \Rightarrow\ \forall x\,P(x)\land\forall x\,Q(x)}\;\Rightarrow\!\mathrm{I}\ 1$$

(注意 ※ 1, ※ 2)

(※ 1)　結論 $\forall x\,P(x)$ や結論で有効な仮定 1 に a が現れないので $\forall$I が使える

(※ 2)　結論 $\forall x\,Q(x)$ や結論で有効な仮定 1 に b が現れないので $\forall$I が使える

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{P\land\exists x\,Q(x)}}{\exists x\,Q(x)}\;\land\mathrm{E}_2\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{P\land\exists x\,Q(x)}}{P}\;\land\mathrm{E}_1\quad\overset{2}{Q(a)}}{P\land Q(a)}\;\land\mathrm{I}}{\exists x\,(P\land Q(x))}\;\exists\mathrm{I}}{\exists x\,(P\land Q(x))}\;\exists\mathrm{E}\ 2}{P\land\exists x\,Q(x)\ \Rightarrow\ \exists x\,(P\land Q(x))}\;\Rightarrow\!\mathrm{I}\ 1$$

(注意 ※ 3)

(※ 3)　前提 $\exists x\,Q(x)$ と $\exists x\,(P\land Q(x))$ や前提の右式で有効な (2 以外の) 仮定 1 に a が現れないので $\exists$E が使える

(3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\exists x\,\forall y\,R(x,y)}\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\forall y\,R(a,y)}}{R(a,b)}\;\forall\mathrm{E}}{\exists x\,R(x,b)}\;\exists\mathrm{I}}{\exists x\,R(x,b)}\;\exists\mathrm{E}\ 2}{\forall y\,\exists x\,R(x,y)}\;\forall\mathrm{I}}{\exists x\,\forall y\,R(x,y)\ \Rightarrow\ \forall y\,\exists x\,R(x,y)}\;\Rightarrow\!\mathrm{I}\ 1$$

(注意 ※ 4)
(注意 ※ 5)

(※ 4)　前提 $\exists x\,\forall y\,R(x,y)$ と $\exists x\,R(x,b)$ に a が現れず，前提の右式で有効な仮定は 2 だけなので $\exists$E が使える

(※ 5)　結論 $\forall y\,\exists x\,R(x,y)$ や結論で有効な仮定 1 に b が現れないので $\forall$I が使える

規則 $\exists$E と $\forall$I の適用順を逆にしても導出できる

(4)

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\exists x\, \forall y\, R(f(x), y)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{\forall y\, R(f(a), y)}}{R(f(a), g(f(a), b))}\ \forall\mathrm{E}}{\exists x\, R(x, g(x, b))}\ \exists\mathrm{I}}{\dfrac{\exists x\, R(x, g(x, b))}{\forall y\, \exists x\, R(x, g(x, y))}\ \forall\mathrm{I}}\ \exists\mathrm{E}\ 2}{\exists x\, \forall y\, R(f(x), y) \ \Rightarrow\ \forall y\, \exists x\, R(x, g(x, y))}\ \Rightarrow\mathrm{I}\ 1
$$

(注意 ※ 6)
(注意 ※ 7)
(注意 ※ 8)
(注意 ※ 9)

(※ 6) ∀E では，変数 y を変数でない項 $g(f(a), b)$ にも具体化できる

(※ 7) ∃I では，変数でない項 $f(a)$ も変数 x に置換できる

(※ 8) 前提 $\exists x\, \forall y\, R(f(x), y)$ と $\exists x\, R(x, g(x, b))$ に a が現れず，前提の右式で有効な仮定は 2 だけなので ∃E が使える

(※ 9) 結論 $\forall y\, \exists x\, R(x, g(x, y))$ や結論で有効な仮定 1 に b が現れないので ∀I が使える

(3) の証明と同様に，規則 ∃E と ∀I の適用順を逆にしても証明できる

自然演繹の証明 (古典論理)

各種の論理法則を導く自然演繹の証明図のうち，背理法規則が必要な例を以下に示す.

●命題論理の証明

問 1　以下の各論理式を導く，自然演繹による証明図を示せ．排中律 (EM) を使ってもよい.

(1) $\neg\neg P \;\Rightarrow\; P$

(2) $(P \Rightarrow Q) \;\Rightarrow\; \neg P \vee Q$

(3) $\neg(P \wedge Q) \;\Rightarrow\; \neg P \vee \neg Q$

(4) $(P \wedge Q \Rightarrow R \wedge S) \;\Rightarrow\; (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow S)$

答 1

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\neg P}\quad\overset{1}{\neg\neg P}}{\bot}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{P}\ \bot_{\mathrm{c}}\ 2}{\neg\neg P \;\Rightarrow\; P}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P\vee\neg P}\ \mathrm{EM}\quad \overset{2}{P}\quad \dfrac{\dfrac{\overset{3}{\neg P}\quad\overset{1}{\neg\neg P}}{\bot}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{P}\ \bot}{P}\ {\vee}\mathrm{E}\ 2,3}{\neg\neg P \;\Rightarrow\; P}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1$$

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{P}\quad\overset{1}{P\Rightarrow Q}}{Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{\neg P\vee Q}\ {\vee}\mathrm{I}_2\quad \overset{2}{\neg(\neg P\vee Q)}}{\bot}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{\neg P}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 3}{\neg P\vee Q}\ {\vee}\mathrm{I}_1\quad \overset{2}{\neg(\neg P\vee Q)}}{\bot}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{\neg P\vee Q}\ \bot_{\mathrm{c}}\ 2}{(P\Rightarrow Q)\;\Rightarrow\;\neg P\vee Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P\vee\neg P}\ \mathrm{EM}\quad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{P}\quad\overset{1}{P\Rightarrow Q}}{Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{\neg P\vee Q}\ {\vee}\mathrm{I}_2\quad \dfrac{\overset{3}{\neg P}}{\neg P\vee Q}\ {\vee}\mathrm{I}_1}{\neg P\vee Q}\ {\vee}\mathrm{E}\ 2,3}{(P\Rightarrow Q)\;\Rightarrow\;\neg P\vee Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1$$

(3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P\vee\neg P}\ \mathrm{EM}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{P}\quad\overset{4}{Q}}{P\wedge Q}\ {\wedge}\mathrm{I}\quad \overset{1}{\neg(P\wedge Q)}}{\bot}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{\neg Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 4}{\neg P\vee\neg Q}\ {\vee}\mathrm{I}_2\quad \dfrac{\overset{3}{\neg P}}{\neg P\vee\neg Q}\ {\vee}\mathrm{I}_1}{\neg P\vee\neg Q}\ {\vee}\mathrm{E}\ 2,3}{\neg(P\wedge Q)\;\Rightarrow\;\neg P\vee\neg Q}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1$$

(4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P\vee\neg P}\ \mathrm{EM}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Q\vee\neg Q}\ \mathrm{EM}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{P}\quad\overset{5}{Q}}{P\wedge Q}\ {\wedge}\mathrm{I}\quad \overset{1}{P\wedge Q\Rightarrow Q\wedge S}}{R\wedge S}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{S}\ {\wedge}\mathrm{E}_2\quad \dfrac{\dfrac{\overset{4}{Q}\quad\overset{6}{\neg Q}}{\bot}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{S}\ \bot}{S}\ {\vee}\mathrm{E}\ 5,6}{Q\Rightarrow S}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 4}{(P\Rightarrow R)\vee(Q\Rightarrow S)}\ {\vee}\mathrm{I}_2\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{7}{P}\quad\overset{3}{\neg P}}{\bot}\ {\Rightarrow}\mathrm{E}}{R}\ \bot}{P\Rightarrow R}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 7}{(P\Rightarrow R)\vee(Q\Rightarrow S)}\ {\vee}\mathrm{I}_1}{(P\Rightarrow R)\vee(Q\Rightarrow S)}\ {\vee}\mathrm{E}\ 2,3}{(P\wedge Q\Rightarrow R\wedge S)\;\Rightarrow\;(P\Rightarrow R)\vee(Q\Rightarrow S)}\ {\Rightarrow}\mathrm{I}\ 1$$

●述語論理の証明

問 2　以下の各論理式を導く，自然演繹による証明図を示せ．

(1) $\neg\forall x\,\neg P(x) \;\Rightarrow\; \exists x\,P(x)$

(2) $\big(P \Rightarrow \exists x\,Q(x)\big) \;\Rightarrow\; \exists x\,\big(P \Rightarrow Q(x)\big)$

答 2

(1)

$$
\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{\exists x\,P(x) \lor \neg\,\exists x\,P(x)}}\;\mathrm{EM} \qquad \overset{2}{\exists x\,P(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{4}{P(a)}}{\exists x\,P(x)}\;\exists\mathrm{I} \qquad \overset{3}{\neg\,\exists x\,P(x)}}{\bot}\;\Rightarrow\mathrm{E}}{\neg\,P(a)}\;\Rightarrow\mathrm{I}\ 4}{\forall x\,\neg\,P(x)}\;\forall\mathrm{I} \qquad \overset{1}{\neg\,\forall x\,\neg\,P(x)}}{\bot}\;\Rightarrow\mathrm{E}}{\exists x\,P(x)}\;\bot}{\exists x\,P(x)}\;\lor\mathrm{E}\ 2,3}{\neg\forall x\,\neg P(x) \;\Rightarrow\; \exists x\,P(x)}\;\Rightarrow\mathrm{I}\ 1
$$

※ ∀I での変数条件の成立 に注意

(2)

$$
\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{P \lor \neg\,P}}\;\mathrm{EM} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{P} \quad \overset{1}{P \Rightarrow \exists x\,Q(x)}}{\exists x\,Q(x)}\;\Rightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{4}{Q(a)}}{P \Rightarrow Q(a)}\;\Rightarrow\mathrm{I}}{\exists x\,(P \Rightarrow Q(x))}\;\exists\mathrm{I}}{\exists x\,(P \Rightarrow Q(x))}\;\exists\mathrm{E}\ 4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{5}{P} \quad \overset{3}{\neg\,P}}{\bot}\;\Rightarrow\mathrm{E}}{Q(b)}\;\bot}{P \Rightarrow Q(b)}\;\Rightarrow\mathrm{I}\ 5}{\exists x\,(P \Rightarrow Q(x))}\;\exists\mathrm{I}}{\exists x\,(P \Rightarrow Q(x))}\;\lor\mathrm{E}\ 2,3}{(P \Rightarrow \exists x\,Q(x)) \;\Rightarrow\; \exists x\,(P \Rightarrow Q(x))}\;\Rightarrow\mathrm{I}\ 1
$$

※ ⇒I での 0 個の仮定解消 (中央最上段) と ∃E での変数条件の成立 に注意

論理式の意味付け

述語論理の意味論に関する問題とその解答例を以下に示す．

●構造のもとでの論理式の真偽

問 1

0 変数関数記号 c と 1 変数関数記号 f と 2 変数関数記号 g と 1 変数述語記号 P を要素として含む言語を考える．この言語への意味付けのための構造 $\mathcal{A} = (U, I)$ を，以下の通りに定める．対象領域を $U = \mathbb{N}$ と定め，各記号の解釈 I を次の通りに定める．

$$
\begin{array}{lcll}
c^I & = & 0 & \text{(記号 } c \text{ を自然数の 0 と解釈)} \\
f^I(n) & = & n+1 & \text{(記号 } f \text{ を自然数に 1 を足す関数と解釈)} \\
g^I(m,n) & = & m+n & \text{(記号 } g \text{ を自然数の和の関数と解釈)} \\
P^I(n) & = & \begin{cases} 1 & (n \text{ は偶数}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} & \text{(記号 } P \text{ を「偶数である」という述語と解釈)}
\end{array}
$$

以下の各論理式が構造 $\mathcal{A}$ で真 (正しい) か偽 (正しくない) かを，理由と共に答えよ．

(1) $P(f(c))$

(2) $\exists x\, P(f(x))$

(3) $\forall x\, \neg P(f(g(x,x)))$

答 1

(1) 偽である．なぜなら，構造 $\mathcal{A}$ のもとで $P(f(c))$ は「1 は偶数である」を意味するが，1 は偶数ではないからである．論理式 $P(f(c))$ の構造 $\mathcal{A}$ での真理値 $P(f(c))^{\mathcal{A}}$ を計算すると $P(f(c))^{\mathcal{A}} = P^I(f^I(c^I)) = P^I(0+1) = P^I(1) = 0$ となることからも，論理式 $P(f(c))$ が構造 $\mathcal{A}$ のもとで偽 ($\mathcal{A} \not\models P(f(c))$) といえる．

(2) 真である．なぜなら，構造 $\mathcal{A}$ のもとで $\exists x\, P(f(x))$ は「1 を足すと偶数となる自然数が存在する」を意味し，例えば 3 に 1 を足すと 4 という偶数になるからである．なお，構造 $\mathcal{A}$ のもとでの真理値を各論理記号の意味に沿って計算すると $(\exists x\, P(f(x)))^{\mathcal{A}} = \max\{P^I(f^I(n)) \mid n \in \mathbb{N}\} = \max\{P^I(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} = \max\{0,1\} = 1$ となる．

(3) 真である．なぜなら，$\forall x\, \neg P(f(g(x,x)))$ は「どの自然数 n についても，$2n+1$ は偶数ではない」を意味するが，n が自然数なら $2n+1$ は奇数だからである．構造 $\mathcal{A}$ のもとでの真理値は $(\forall x\, \neg P(f(g(x,x))))^{\mathcal{A}} = \min\{1 - P^I(f^I(g^I(n,n))) \mid n \in \mathbb{N}\} = \min\{1 - P^I(2n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} = \min\{1-0 \mid n \in \mathbb{N}\} = \min\{1\} = 1$ である．

●論理式が真となる構造

問 2

論理式 $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$ が充足可能であることを示すため，この論理式が真となる構造を一つ示せ．

答 2

P と Q をそれぞれ「4 の倍数である」「偶数である」という述語に解釈すれば，与えられた論理式が真となる．（$P^I(n) = 1$ のとき常に $Q^I(n) = 1$ が成り立つ解釈 I であれば，他の解釈でもよい．）

問 3

論理式 $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow \neg R(x))$ の意味付けを考える．

(1) この論理式が真となる構造を与えたい．対象領域を整数全体とし，P を「偶数である」，Q を「3 の倍数である」，という述語と解釈するときの，R の解釈を与えよ．また，その構造のもとで上記の論理式の真理値が真となる理由を，各論理記号の意味をふまえて説明せよ．

(2) (1) の結果から，上記の論理式について何が分かるか，意味論の用語を使ってひとことで答えよ．

答 3

(1) R は「1 である」という述語と解釈すればよい．なぜなら，x がどんな整数でも，x が偶数でしかも x が 3 の倍数のとき，つまり，x が 6 の倍数のとき，x は 1 とはならないからである.（R の解釈は，x が 6 の倍数のとき常に $R(x)$ が偽になれば何でもよい.）

(2) 与えられた論理式が充足可能だと分かる．

●論理式が偽となる構造

問 4

次の各論理式が恒真ではないことを示すため，真理値が偽となる構造をそれぞれ一つずつ示せ．偽となる理由も簡潔に述べること．

(1) $\exists x\, P(x) \;\Rightarrow\; \forall x\, P(x)$

(2) $\forall y\, \exists x\, R(x, y) \;\Rightarrow\; \exists x\, \forall y\, R(x, y)$

(3) $(\forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)) \;\Rightarrow\; \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$

(4) $(\exists x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)) \;\Rightarrow\; \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$

答 4

(1) 対象領域を自然数全体の集合とし，P を「偶数である」という性質と解釈する構造 $\mathcal{A}_2$ に対して，論理式の真理値が偽となる．$\mathcal{A}_1 \models \exists x\, P(x)$ となり，$\mathcal{A}_1 \not\models \forall x\, P(x)$ となるからである．（$P(x)$ が偽となる x が一つでもあれば，他の解釈でもよい．）

(2) 対象領域を自然数全体の集合とし，R を「1 だけ大きい」という関係と解釈する構造 $\mathcal{A}_1$ に対して，論理式の真理値が偽となる．$\mathcal{A}_2 \models \forall y\, \exists x\, R(x, y)$ となり，$\mathcal{A}_2 \not\models \exists x\, \forall y\, R(x, y)$ となるからである．（含意の前提 $\forall y\, \exists x\, R(x, y)$ が真となり，結論 $\exists x\, \forall y\, R(x, y)$ が偽となる構造は他にも多数ある．）

(3) 対象領域を自然数全体の集合とし，P を「偶数である」という性質と解釈し，Q を「4 の倍数である」という性質と解釈する構造 $\mathcal{A}_3$ に対して，論理式の真理値が偽となる．$\mathcal{A}_3 \not\models \forall x\, P(x)$ だから $\mathcal{A}_3 \models \forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)$ となり，さらに $\mathcal{A}_3 \not\models \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$ となるからである．

(4) (3) で使った構造 $\mathcal{A}_3$ に対して，論理式の真理値が偽となる．$\mathcal{A}_3 \models \exists x\, P(x)$ と $\mathcal{A}_3 \models \exists x\, Q(x)$ が成り立つから，$\mathcal{A}_3 \models \exists x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)$ となり，$\mathcal{A}_3 \not\models \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$ となるからである．

問 5

問 1 と同じ言語を同じ対象領域で解釈する構造を考える．定数記号 c や関数記号 f, g の解釈を問 1 の構造 $\mathcal{A}$ から変えずに，問 1 の論理式 (1),(2) が共に偽となるように，述語記号 P に対する解釈を定めよ．

答 5

P を「0 である」という述語に解釈すれば，二つの論理式が偽となる．

問 6

論理式 $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \;\Rightarrow\; \exists x\,(P(x) \vee Q(x))$ は恒真かどうかを，理由と共に説明せよ．

答 6

恒真ではない．この論理式が偽になる構造があるからである．例えば，対象領域を自然数全体の集合とし，P を「自然数ではない」という性質と解釈し，Q を「偶数である」という性質と解釈する構造 $\mathcal{A}$ に対して，含意の前提が真 ($\mathcal{A} \models \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$) となり，含意の結論が偽 ($\mathcal{A} \not\models \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$) となるからである．($P$ を常に偽の述語と解釈すれば，Q の解釈は何でもよい．)
