

『はじめての数理論理学』 第1版第3刷に対する修正点と改善点 (2021.7.21 作成) 山田 俊行

修正点

(なし)

改善点

1. p. 116 確認問題 3.16 解説

誤: 正しい証明は例題 3.8 にある

正: 正しい証明は p.79 の例題 3.8 にある

本書の推論規則 $\exists E$ の変数条件の説明 (p. 79) には誤りがあり, 自然演繹で次の証明ができてしまう.

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y R(x, y)}{\exists y R(a, y)} \quad \forall E \quad \frac{R(a, a)}{\exists x R(x, x)} \quad \exists I}{\exists x R(x, x)} \quad \exists E \ 2}{\forall x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists x R(x, x)} \Rightarrow I \ 1$$

この証明の結論 $\forall x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists x R(x, x)$ が恒真ではないことは, 3.10 節の意味論の議論でわかる. たとえば, $R(x, y)$ が自然数上での関係 $x + 1 = y$ を表すと解釈すると, 含意の前提 $\forall x \exists y R(x, y)$ は真だが含意の結論 $\exists x R(x, x)$ が偽となるからである. つまり, このままでは自然演繹に望まれる健全性 (p. 97) が成り立たない. 規則 $\exists E$ を使うとき, まったく自由に選ばれた対象を表す変数を, 仮定 2 で R の第 2 引き数に使うべきなのに, 規則 $\exists E$ の前提の左式 $\exists y R(a, y)$ に現れる a を使うと, 「 R の二つの引き数が等しい」という余計な制約が加わってしまう. この誤りを防ぐため, 変数条件では, 規則 $\exists E$ の前提の左式への, 変数 a の自由出現を禁止する必要がある.

1. p. 79 2 行目

誤: 規則の結論

正: 規則の前提 $\exists x A$ と B

2. p. 79 3 行目

誤: 規則の結論で有効な仮定

正: 規則の前提の右式 B で有効な仮定のうち, 一時的な仮定 i 以外のもの

3. p. 79 例題 3.8 下から 8 行目

誤: この例での規則 $\exists E$ の ... どちらにも a は現れない.

正: この例での規則 $\exists E$ の前提は $\exists x \neg P(x)$ と \perp であり, このどちらにも a は現れない. また, 規則 $\exists E$ による一時的な仮定 3 以外の, 前提の右式 \perp で有効な仮定は 2 であり, ここにも a は現れない.

4. p. 81 本文 4 行目

誤: (1) 結論, (2) 結論で有効な仮定,

正: それぞれ特定の場所

5. p. 82 確認問題 3.18

誤: $\forall x \exists y R(f(x), g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(x), x)$

正: $\forall x \exists y R(x, g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(c), x)$

補足: 3.10 節の意味論の議論から, 元の論理式は恒真ではないことがわかる. たとえば, 自然数上で $R(x, y)$ が関係 $x + 1 = y$ を表し, f と g が恒等関数を表すと解釈すると, 訂正前の含意の前提 $\forall x \exists y R(f(x), g(y))$ は真だが含意の結論 $\exists x R(f(x), x)$ が偽となるからである. また, 健全な論理の枠組みで証明可能な論理式は常に恒真なので, p. 79 で変数条件の修正をすると, 訂正前の論理式は証明できなくなる.

6. p. 86 定義 3.3 (12)

誤: D_2 の依存する仮定のうち A 以外のものに

正: B にも D_2 の依存する仮定のうち A 以外のものにも

7. p. 99 例題 3.15 3 行目

誤: さらに, 規則 $\exists E$ の ... 自由変数 b は現れない.

正: さらに, 規則 $\exists E$ の二つの前提 $\exists y \forall x R(x, y)$ と $\exists y R(a, y)$ に変数 b が現れず, 規則 $\exists E$ の一時的な仮定 2 以外には前提の右式で有効な仮定はない.

8. p. 116 確認問題 3.16 解答 1 行目

誤: 結論 $\neg P(a)$

正: 前提 $\neg P(a)$

9. p. 117 確認問題 3.17 解説 下から 5 行目

誤: ここでは, ... 規則 $\exists E$ の変数条件が成り立つ.

正: 規則 $\exists E$ の二つの前提 $\exists x (P \vee Q(x))$ と $P \vee \exists x Q(x)$ に変数 a は現れない. また, 規則 $\exists E$ による一時的な仮定 2 で変数 a を使うのは問題ない. さらに, 選言の除去規則 ($\vee E$) による場合分けのために一時的に設けた仮定 3, 4 は選言の除去が済めば無効になる. したがって, 規則 $\exists E$ の変数条件が成り立つ.

10. p. 117 確認問題 3.18 解答と解説

誤: (問題の論理式の変更に合わせて, 解答と解説を差し替える)

正: $\forall x \exists y R(x, g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(c), x)$ の証明は以下のとおり.

$$\frac{\frac{\forall x \exists y R(x, g(y))}{\exists y R(f(c), g(y))} \quad \forall E \quad \frac{R(f(c), g(a))}{\exists x R(f(c), x)} \quad \exists I}{\exists x R(f(c), x)} \quad \exists E \ 2}{\forall x \exists y R(x, g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(c), x)} \Rightarrow I \ 1$$

左上の $\forall E$ と右上の $\exists I$ で変数 x に代入する項として選んだのは, それぞれ $f(c)$ と $g(a)$ である. また, 規則 $\exists E$ の変数条件が成り立つのは, 変数 a が規則の二つの前提 $\exists y R(f(c), g(y))$ と $\exists x R(f(c), x)$ に現れず, 規則 $\exists E$ の一時的な仮定 2 以外に前提の右式で有効な仮定がないからである. 規則 $\forall E$ や $\exists I$ での x への適切な代入がすぐにわからなければ, とりあえず t_1, t_2 などとおき, 後で形が合うように置き換えればよい.

$$\frac{\frac{\forall x \exists y R(x, g(y))}{\exists y R(t_1, g(y))} \quad \forall E \quad \frac{R(f(c), t_2)}{\exists x R(f(c), x)} \quad \exists I}{\exists x R(f(c), x)} \quad \exists E \ 2}{\forall x \exists y R(x, g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(c), x)} \Rightarrow I \ 1$$

規則 $\exists E$ で変数 y に a を代入する場合に, t_1 が $f(c)$, t_2 が $g(a)$ であるとわかる.

11. p. 122 演習問題 1.3 (6) 解答 ($\exists E$ 以外の修正)

誤: $j \mid x$

正: $j \mid y$

12. p. 123 演習問題 2.4 解答 ($\exists E$ 以外の修正: 方針の明示)

誤: z があると仮定すれば, $z = x$ と $z = y$ から $x = y$ が導かれ, $x \neq y$ と矛盾する.

正: z があると仮定して矛盾を導く. 二つ目の仮定の $z = x$ と $z = y$ から $x = y$ が導かれる. これは, 一つ目の仮定 $x \neq y$ と矛盾する.

13. p.124 演習問題 2.5 解答 ($\exists E$ 以外の修正: 方針の明示)

誤: 証明

正: 証明 f が単射でないことを示すため, $f(x_1) = f(x_2)$ と $x_1 \neq x_2$ を同時に満たす実数 x_1 と x_2 を見つける.

14. p.124 演習問題 2.6 解答 ($\exists E$ 以外の修正 : 方針の明示)

誤: 証明

正: 証明 背理法による証明のため,

15. p. 130 演習問題 3.6 (1) 解答

誤: 変数条件については, ... 自由変数 a が現れないことを確かめる.

正: 変数条件については, $\exists E$ の二つの前提 $\exists x P(f(x))$ と \perp に加えて, 前提の右式で有効な仮定 2 にも, 自由変数 a が現れないことを確かめる.

16. p. 131 演習問題 3.7 (3) 解答

誤: 変数条件については, ... 自由変数 a が現れないことを確かめる.

正: 変数条件については, $\exists E$ の二つの前提 $\exists x S(f(x))$ と \perp に加えて, 前提の右式で有効な仮定 1 にも, 自由変数 a が現れないことを確かめる.

1. p. 21 10行目
誤: 和集合 $S \cup T$ と共通部分 $S \cap T$
正: 共通部分 $S \cap T$ と和集合 $S \cup T$
2. p. 78 下から8行目
誤: 2命題
正: 二つの論理式
補足: 述語論理の論理式は命題を表すとは限らない
3. p. 82 例題 3.9 二つの図式
誤: $\forall R(x, f(x))$
正: $\forall x R(x, f(x))$
補足: 上の図式の最上段と最下段, 下の図式の最下段, の3か所
4. p. 94 例題 3.13 下から3番目の数式
誤: $= P_1^I(f_1(x_1))^{A, v'} =$
正: $= P_1^I(f_1(x_1))^{A, v'} =$
5. p. 95 確認問題 3.21
誤: 対象定数
正: 0変数の関数記号
補足: 「対象定数」は本書では未定義
6. p. 96 下から3行目
誤: 大小関係 \leq
正: 大小関係 $<$
7. p. 102 確認問題 1.3 解答 4行目
誤: (y) は偶数
正: (y) は奇数
8. p. 103 確認問題 1.4 数式
誤: $\left(\left((2 | 12) \wedge (3 | 12) \right) \wedge \left(\text{略} \right) \right)$
正: $\left(\left((2 | 12) \wedge (3 | 12) \right) \wedge \left(\text{略} \right) \right)$
補足: 3番目の開き括弧と対応する閉じ括弧の対が冗長
9. p. 109 確認問題 2.2 解説 2行目
誤: 結論の否定「 $\neg 3x + 1 : \text{偶}$ 」を仮定して前提の否定「 $\neg x : \text{偶}$ 」を導く
正: 結論の否定「 $\neg x : \text{奇}$ 」を仮定して前提の否定「 $\neg 3x + 1 : \text{偶}$ 」を導く
10. p. 109 確認問題 2.2 解説 3行目
誤: 前提「 $x : \text{偶}$ 」と結論の否定「 $\neg 3x + 1 : \text{偶}$ 」を仮定して
正: 前提「 $3x + 1 : \text{偶}$ 」と結論の否定「 $\neg x : \text{奇}$ 」を仮定して
11. p. 118 確認問題 3.21 解説 4行目
誤: $\forall x_2 R(c, x_2)$
正: $\forall x_2 P_2(f_1, x_2)$
12. p. 118 確認問題 3.21 解説 6行目
誤: 構造 A
正: 構造 \mathcal{A}