

修正点

(なし)

改善点

1. p. 116 確認問題 3.16 解説

誤: 正しい証明は例題 3.8 にある

正: 正しい証明は p.79 の例題 3.8 にある

本書の推論規則  $\exists E$  の変数条件の説明 (p. 79) には誤りがあり，自然演繹で次の証明ができてしまう．

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y R(x, y)}{\exists y R(a, y)} \quad \forall E \quad \frac{R(a, a)}{\exists x R(x, x)} \quad \exists I}{\exists x R(x, x)} \quad \exists E \ 2}{\forall x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists x R(x, x)} \Rightarrow I \ 1$$

この証明の結論  $\forall x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists x R(x, x)$  が恒真ではないことは，3.10 節の意味論の議論でわかる．たとえば， $R(x, y)$  が自然数上での関係  $x + 1 = y$  を表すと解釈すると，含意の前提  $\forall x \exists y R(x, y)$  は真だが含意の結論  $\exists x R(x, x)$  が偽となるからである．つまり，このままでは自然演繹に望まれる健全性 (p. 97) が成り立たない．規則  $\exists E$  を使うとき，まったく自由に選ばれた対象を表す変数を，仮定 2 で  $R$  の第 2 引き数に使うべきなのに，規則  $\exists E$  の前提の左式  $\exists y R(a, y)$  に現れる  $a$  を使うと，「 $R$  の二つの引き数が等しい」という余計な制約が加わってしまう．この誤りを防ぐため，変数条件では，規則  $\exists E$  の前提の左式への，変数  $a$  の自由出現を禁止する必要がある．

1. p. 79 2 行目

誤: 規則の結論

正: 規則の前提  $\exists x A$  と  $B$

2. p. 79 3 行目

誤: 規則の結論で有効な仮定

正: 規則の前提の右式  $B$  で有効な仮定のうち，一時的な仮定  $i$  以外のもの

3. p. 79 例題 3.8 下から 8 行目

誤: この例での規則  $\exists E$  の ... どちらにも  $a$  は現れない．

正: この例での規則  $\exists E$  の前提は  $\exists x \neg P(x)$  と  $\perp$  であり，このどちらにも  $a$  は現れない．また，規則  $\exists E$  による一時的な仮定 3 以外の，前提の右式  $\perp$  で有効な仮定は 2 であり，ここにも  $a$  は現れない．

4. p. 81 本文 4 行目

誤: (1) 結論，(2) 結論で有効な仮定，

正: それぞれ特定の場所

5. p. 82 確認問題 3.18

誤:  $\forall x \exists y R(f(x), g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(x), x)$

正:  $\forall x \exists y R(x, g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(c), x)$

補足: 3.10 節の意味論の議論から，元の論理式は恒真ではないことがわかる．たとえば，自然数上で  $R(x, y)$  が関係  $x + 1 = y$  を表し， $f$  と  $g$  が恒等関数を表すと解釈すると，訂正前の含意の前提  $\forall x \exists y R(f(x), g(y))$  は真だが含意の結論  $\exists x R(f(x), x)$  が偽となるからである．また，健全な論理の枠組みで証明可能な論理式は常に恒真なので，p. 79 で変数条件の修正をすると，訂正前の論理式は証明できなくなる．

6. p. 86 定義 3.3 (12)

誤:  $D_2$  の依存する仮定のうち  $A$  以外のものに

正:  $B$  にも  $D_2$  の依存する仮定のうち  $A$  以外のものにも

7. p. 99 例題 3.15 3 行目

誤: さらに, 規則  $\exists E$  の ... 自由変数  $b$  は現れない.

正: さらに, 規則  $\exists E$  の二つの前提  $\exists y \forall x R(x, y)$  と  $\exists y R(a, y)$  に変数  $b$  が現れず, 規則  $\exists E$  の一時的な仮定 2 以外には前提の右式で有効な仮定はない.

8. p. 116 確認問題 3.16 解答 1 行目

誤: 結論  $\neg P(a)$

正: 前提  $\neg P(a)$

9. p. 117 確認問題 3.17 解説 下から 5 行目

誤: ここでは, ... 規則  $\exists E$  の変数条件が成り立つ.

正: 規則  $\exists E$  の二つの前提  $\exists x (P \vee Q(x))$  と  $P \vee \exists x Q(x)$  に変数  $a$  は現れない. また, 規則  $\exists E$  による一時的な仮定 2 で変数  $a$  を使うのは問題ない. さらに, 選言の除去規則 ( $\vee E$ ) による場合分けのために一時的に設けた仮定 3, 4 は選言の除去が済めば無効になる. したがって, 規則  $\exists E$  の変数条件が成り立つ.

10. p. 117 確認問題 3.18 解答と解説

誤: (問題の論理式の変更に合わせて, 解答と解説を差し替える)

正:  $\forall x \exists y R(x, g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(c), x)$  の証明は以下のとおり.

$$\frac{\frac{\forall x \exists y R(x, g(y))}{\exists y R(f(c), g(y))} \quad \forall E \quad \frac{R(f(c), g(a))}{\exists x R(f(c), x)} \quad \exists I}{\exists x R(f(c), x)} \quad \exists E \ 2}{\forall x \exists y R(x, g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(c), x)} \Rightarrow I \ 1$$

左上の  $\forall E$  と右上の  $\exists I$  で変数  $x$  に代入する項として選んだのは, それぞれ  $f(c)$  と  $g(a)$  である. また, 規則  $\exists E$  の変数条件が成り立つのは, 変数  $a$  が規則の二つの前提  $\exists y R(f(c), g(y))$  と  $\exists x R(f(c), x)$  に現れず, 規則  $\exists E$  の一時的な仮定 2 以外に前提の右式で有効な仮定がないからである. 規則  $\forall E$  や  $\exists I$  での  $x$  への適切な代入がすぐにわからなければ, とりあえず  $t_1, t_2$  などとおき, 後で形が合うように置き換えればよい.

$$\frac{\frac{\forall x \exists y R(x, g(y))}{\exists y R(t_1, g(y))} \quad \forall E \quad \frac{R(f(c), t_2)}{\exists x R(f(c), x)} \quad \exists I}{\exists x R(f(c), x)} \quad \exists E \ 2}{\forall x \exists y R(x, g(y)) \Rightarrow \exists x R(f(c), x)} \Rightarrow I \ 1$$

規則  $\exists E$  で変数  $y$  に  $a$  を代入する場合に,  $t_1$  が  $f(c)$ ,  $t_2$  が  $g(a)$  であるとわかる.

11. p. 122 演習問題 1.3 (6) 解答 ( $\exists E$  以外の修正)

誤:  $j \mid x$

正:  $j \mid y$

12. p. 123 演習問題 2.4 解答 ( $\exists E$  以外の修正: 方針の明示)

誤:  $z$  があると仮定すれば,  $z = x$  と  $z = y$  から  $x = y$  が導かれ,  $x \neq y$  と矛盾する.

正:  $z$  があると仮定して矛盾を導く. 二つ目の仮定の  $z = x$  と  $z = y$  から  $x = y$  が導かれる. これは, 一つ目の仮定  $x \neq y$  と矛盾する.

13. p.124 演習問題 2.5 解答 ( $\exists E$  以外の修正: 方針の明示)

誤: 証明

正: 証明  $f$  が単射でないことを示すため,  $f(x_1) = f(x_2)$  と  $x_1 \neq x_2$  を同時に満たす実数  $x_1$  と  $x_2$  を見つける.

14. p.124 演習問題 2.6 解答 ( $\exists E$  以外の修正 : 方針の明示)

誤: 証明

正: 証明 背理法による証明のため,

15. p. 130 演習問題 3.6 (1) 解答

誤: 変数条件については, ... 自由変数  $a$  が現れないことを確かめる.

正: 変数条件については,  $\exists E$  の二つの前提  $\exists x P(f(x))$  と  $\perp$  に加えて, 前提の右式で有効な仮定 2 にも, 自由変数  $a$  が現れないことを確かめる.

16. p. 131 演習問題 3.7 (3) 解答

誤: 変数条件については, ... 自由変数  $a$  が現れないことを確かめる.

正: 変数条件については,  $\exists E$  の二つの前提  $\exists x S(f(x))$  と  $\perp$  に加えて, 前提の右式で有効な仮定 1 にも, 自由変数  $a$  が現れないことを確かめる.

1. p. 21 10行目  
誤: 和集合  $S \cup T$  と共通部分  $S \cap T$   
正: 共通部分  $S \cap T$  と和集合  $S \cup T$
2. p. 78 下から8行目  
誤: 2命題  
正: 二つの論理式  
補足: 述語論理の論理式は命題を表すとは限らない
3. p. 82 例題 3.9 二つの図式  
誤:  $\forall R(x, f(x))$   
正:  $\forall x R(x, f(x))$   
補足: 上の図式の最上段と最下段, 下の図式の最下段, の3か所
4. p. 94 例題 3.13 下から3番目の数式  
誤:  $= P_1^I(f_1(x_1))^{A, v'} =$   
正:  $= P_1^I(f_1(x_1))^{A, v'} =$
5. p. 95 確認問題 3.21  
誤: 対象定数  
正: 0変数の関数記号  
補足: 「対象定数」は本書では未定義
6. p. 96 下から3行目  
誤: 大小関係  $\leq$   
正: 大小関係  $<$
7. p. 102 確認問題 1.3 解答 4行目  
誤:  $(y)$  は偶数  
正:  $(y)$  は奇数
8. p. 103 確認問題 1.4 数式  
誤:  $\left( \left( (2 | 12) \wedge (3 | 12) \right) \wedge \left( \text{略} \right) \right)$   
正:  $\left( \left( (2 | 12) \wedge (3 | 12) \right) \wedge \left( \text{略} \right) \right)$   
補足: 3番目の開き括弧と対応する閉じ括弧の対が冗長
9. p. 109 確認問題 2.2 解説 2行目  
誤: 結論の否定「 $\neg 3x + 1 : \text{偶}$ 」を仮定して前提の否定「 $\neg x : \text{偶}$ 」を導く  
正: 結論の否定「 $\neg x : \text{奇}$ 」を仮定して前提の否定「 $\neg 3x + 1 : \text{偶}$ 」を導く
10. p. 109 確認問題 2.2 解説 3行目  
誤: 前提「 $x : \text{偶}$ 」と結論の否定「 $\neg 3x + 1 : \text{偶}$ 」を仮定して  
正: 前提「 $3x + 1 : \text{偶}$ 」と結論の否定「 $\neg x : \text{奇}$ 」を仮定して
11. p. 118 確認問題 3.21 解説 4行目  
誤:  $\forall x_2 R(c, x_2)$   
正:  $\forall x_2 P_2(f_1, x_2)$
12. p. 118 確認問題 3.21 解説 6行目  
誤: 構造  $A$   
正: 構造  $\mathcal{A}$